Mécanique Physique des Matériaux

Ecriture générale des relations constitutives

École des Pont

Daniel Weisz-Patrault

Ecole des Ponts

Objectifs généraux

Culture fondamentale

- ☐ Concepts de mécanique en grandes déformations
- ☐ Ecriture des comportements
- ☐ Théorie qui sous-tend le calcul numérique

Objectifs de la séance

- ☐ Analyse thermodynamique d'un processus de déformation
- ☐ Notions énergétiques
- ☐ Relations constitutives
- ☐ Objectivité
- ☐ Principe d'indifférence matérielle
- ☐ Identificaiton expérimentale

Plan de la séance

1| Thermodynamique du processus de déformation

2| Objectivité

3| Relations constitutives (comportement)

Plan de la séance

Thermodynamique du processus de déformation

Conservation de la masse

- ρ : masse volumique / Ω_t : domaine dans la configuration actuelle

$$M(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\mathrm{d}\Omega$$

- Conservation de la masse

$$\dot{M}(t) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x}, t)\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\underline{v}(\underline{x}, t).\underline{n}(\underline{x}, t)\mathrm{d}S = 0$$

- Théorème de la divergence

$$\dot{M}(t) = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x}, t) + \mathrm{div}\left[\rho(\underline{x}, t)\underline{v}(\underline{x}, t)\right]\right)\mathrm{d}\Omega = 0$$

- Vrai $\forall\ \Omega_t$: conservation locale de la masse

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x}, t) + \mathrm{div}\left[\rho(\underline{x}, t)\underline{v}(\underline{x}, t)\right] = 0}$$

Thermodynamique du processus de déformation

Dérivée matérielle locale

- ☐ Le vecteur position $\underline{X}$ dans la configuration de référence.
- ☐ Le vecteur position $\underline{x}(\underline{X}, t)$ dans la configuration actuelle.
- ☐ Soit $g(\underline{x}, t)$ une fonction.

$$\dot{g}(\underline{x}, t) = \frac{\partial g}{\partial t}(\underline{x}, t) + \frac{\partial g}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, t).\frac{\partial \underline{x}}{\partial t}$$

- ☐ D'où :

$$\boxed{\dot{g}(\underline{x}, t) = \frac{\partial g}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\nabla} g(\underline{x}, t).\underline{v}(\underline{x}, t)}$$

Thermodynamique du processus de déformation

Equations de bilan globale

- ☐ Soit $G(t)$ une grandeur attachée à une quantité de matière.
  - Masse
  - Quantité de mouvement
  - Energie totale
- ☐ On définit les apports A_G
- ☐ On définit la production interne P_G
- ☐ La variation temporelle $\dot{G}$ en suivant la matière :

$$\boxed{\dot{G} = A_G + P_G}$$

- ☐ Exemple pour la masse $M(t)$:

$$A_M = P_M = 0 \text{ et } \dot{M} = 0$$

Thermodynamique du processus de déformation

Equations de conservation globales

- Pas de production

$$\boxed{P_G = 0}$$

- D'où :

$$\dot{G} = A_G + \cancel{P_G}$$

- Exemple de conservations
  - Masse : même en cas de transport
  - Quantité de mouvement : équilibre
  - Energie totale : premier principe de la thermodynamique

Thermodynamique du processus de déformation

Dérivée matérielle globale

- Soit $G(t)$ une grandeur attachée à une quantité de matière.

$$G(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) g(\underline{x}, t) \mathrm{d}\Omega$$

- Dérivation temporelle

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho(\underline{x}, t) g(\underline{x}, t)\right] \mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) g(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t) . \underline{n}(\underline{x}, t) \mathrm{d}S$$

- Théorème de la divergence

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho(\underline{x}, t) g(\underline{x}, t)\right] + \mathrm{div} \left[\rho(\underline{x}, t) g(\underline{x}, t) \underline{v}(\underline{x}, t)\right] \right) \mathrm{d}\Omega$$

Dérivée matérielle globale

- Calcul des termes

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho(\underline{x},t)g(\underline{x},t)\right] = g\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\mathtt{div}\left[\rho(\underline{x},t)g(\underline{x},t)\underline{v}(\underline{x},t)\right] &= \frac{\partial\left[g\rho v_j\right]}{\partial x_j} = g\frac{\partial\left[\rho v_j\right]}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j}\rho v_j \\ &= g\mathtt{div}\left[\rho\underline{v}\right] + \rho\underline{\nabla}g.\underline{v}\end{aligned}$$

- Rassemblement des termes

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_t}\left(\underbrace{g\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathtt{div}\left[\rho\underline{v}\right]\right)}_{0} + \underbrace{\rho\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \underline{\nabla}g.\underline{v}\right)}_{\dot{g}}\right)\mathrm{d}\Omega$$

- Finallement

$$\boxed{\dot{G}(t) = \int_{\Omega_t}\rho(\underline{x},t)\dot{g}(\underline{x},t)\mathrm{d}\Omega}$$

Thermodynamique du processus de déformation

- Conservation de la masse
- Dérivée matérielle locale
- Equations de bilan globale
- Equations de conservation globales
- Dérivée matérielle globale
- **Equations de bilan locales**
- Equation de conservation de l’énergie totale
- Equation de bilan d’entropie
- Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

Equations de bilan locales

- Apport extérieur A_G décomposé
- Terme volumique et un terme surfacique

$$A_G = \int_{\Omega_t} a_G^V(\underline{x}, t)\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega_t} a_G^S(\underline{x}, t)\mathrm{d}S$$

- Production interne P_G est généralement volumique

$$P_G = \int_{\Omega_t} p_G(\underline{x}, t)\mathrm{d}\Omega$$

- Variation temporelle de G

$$\dot{G} = A_G + P_G$$

- Dérivée matérielle globale

$$\dot{G}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\dot{g}(\underline{x}, t)\mathrm{d}\Omega$$

Equations de bilan locales

- D'où

$$\int_{\Omega_t} \left(\rho(\underline{x}, t)\dot{g}(\underline{x}, t) - a_G^V(\underline{x}, t) - p_G(\underline{x}, t)\right) \mathsf{d}\Omega = \int_{\partial\Omega_t} a_G^S(\underline{x}, t)\mathsf{d}S$$

- Il existe $\underline{a}_G^S$ tel que

$$a_G^S(\underline{x}, t) = \underline{a}_G^S(\underline{x}, t).\underline{n}(\underline{x}, t)$$

- Flux extérieurs $\underline{a}_G^S$

$$\int_{\Omega_t} \left(\rho(\underline{x}, t)\dot{g}(\underline{x}, t) - a_G^V(\underline{x}, t) - p_G(\underline{x}, t)\right) \mathsf{d}\Omega = \int_{\partial\Omega_t} \underline{a}_G^S(\underline{x}, t).\underline{n}(\underline{x}, t)\mathsf{d}S$$

- Théorème de la divergence

$$\int_{\Omega_t} \left(\rho(\underline{x}, t)\dot{g}(\underline{x}, t) - a_G^V(\underline{x}, t) - p_G(\underline{x}, t) - \mathsf{div}\left[\underline{a}_G^S(\underline{x}, t)\right]\right) \mathsf{d}\Omega = 0$$

Equations de bilan locales

- Pour tout Ω_t :

$$\int_{\Omega_t} \left(\rho(\underline{x},t)\dot{g}(\underline{x},t) - a_G^V(\underline{x},t) - p_G(\underline{x},t) - \mathrm{div}\left[\underline{a}_G^S(\underline{x},t)\right]\right) \mathrm{d}\Omega = 0$$

- Forme locale de l'équation de bilan

$$\boxed{\rho(\underline{x},t)\dot{g}(\underline{x},t) = a_G^V(\underline{x},t) + p_G(\underline{x},t) + \mathrm{div}\left[\underline{a}_G^S(\underline{x},t)\right]}$$

- Exemple : bilan de la quantité de mouvement

  - $g(\underline{x},t) \equiv \underline{v}(\underline{x},t)$
  - $\dot{g}(\underline{x},t) \equiv \underline{\gamma}(\underline{x},t)$ (accélération)

  - $a_G^V(\underline{x},t) \equiv \underline{f}(\underline{x},t)$
  - $\underline{a}_G^S(\underline{x},t) \equiv \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$ (contrainte)
  - $p_G(\underline{x},t) = 0$ (conservation)

$$\rho(\underline{x},t)\underline{\gamma}(\underline{x},t) = \underline{f}(\underline{x},t) + 0 + \mathrm{div}\left[\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)\right]$$

Thermodynamique du processus de déformation

Equation de conservation de l'énergie totale

- Postulat

  Il existe une énergie totale E_T attachée à la quantité de matière.
- L'énergie totale comprend l'énergie cinétique E_C
- On appelle énergie interne E_I la différence entre E_T et E_C :

$$\boxed{E_T = E_C + E_I}$$

- Postulat : Premier principe de la thermodynamique

  L'énergie totale se conserve.
  La production d'énergie totale est nulle.

$$\boxed{P_{E_T} = 0}$$

Equation de conservation de l'énergie totale

- Dérivée matérielle globale

$$\dot{E}_T = \dot{E}_C + \dot{E}_I = A_{E_T}$$

- L'apport extérieur A_{E_T} comprend la puissance des efforts extérieurs dans le champ de vitesses réel

$$P_{EXT} = PVE(\underline{v}(\underline{x}, t))$$

- La différence entre A_{E_T} et P_{EXT} est appelée apport de chaleur Q

$$A_{E_T} = P_{EXT} + Q$$

- On écrit

$$\dot{E}_C + \dot{E}_I = P_{EXT} + Q$$

Equation de conservation de l'énergie totale

- Energie cinétique attaché à la quantité de matière

$$E_C(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\underline{v}(\underline{x}, t).\underline{v}(\underline{x}, t)\mathrm{d}\Omega$$

- Dérivée matérielle globale

$$\dot{E}_C(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\underline{\gamma}(\underline{x}, t).\underline{v}(\underline{x}, t)\mathrm{d}\Omega$$

- Accélération $\underline{\gamma}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{v}}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\underline{\nabla}}\left[\underline{v}\right].\underline{v}(\underline{x}, t)$
- Puissance des efforts d'accélération

$$PVA(\underline{V}^*) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\underline{\gamma}(\underline{x}, t).\underline{V}^*(\underline{x})\mathrm{d}\Omega$$

- Puissance des efforts d'accélération dans le champ de vitesses réel $P_{ACC} = PVA(\underline{v}(\underline{x}, t))$

$$\boxed{\dot{E}_C = P_{ACC}}$$

Equation de conservation de l'énergie totale

- Apports d'énergie totale

$$\dot{E}_C + \dot{E}_I = P_{EXT} + Q$$

- Dérivée matérielle de l'énergie cinétique

$$\dot{E}_C = P_{ACC}$$

- Puissance des efforts intérieurs dans le champ de vitesses réel $P_{INT} = PVI(\underline{v}(\underline{x}, t))$
- Principe des puissance virtuelles

$$P_{INT} + P_{EXT} = P_{ACC}$$

- Bilan d'énergie interne

$$\boxed{\dot{E}_I = -P_{INT} + Q}$$

- Apports d'énergie interne Q
- Production d'énergie interne $-P_{INT}$

Equation de conservation de l'énergie totale

- **Postulat** : il existe une densité massique d'énergie interne

$$E_I(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\, e_I(\underline{x}, t) \mathrm{d}\Omega \quad \text{et} \quad \dot{E}_I(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\, \dot{e}_I(\underline{x}, t) \mathrm{d}\Omega$$

- Puissance des efforts intérieurs

$$P_{INT} = -\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} \ \mathrm{d}\Omega$$

- Apport de chaleur volumique et surfacique

$$Q(t) = \int_{\Omega_t} r(\underline{x}, t) \mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \underline{q}(\underline{x}, t) . \underline{n}(\underline{x}, t) \mathrm{d}S$$

- Théorème de la divergence

$$Q(t) = \int_{\Omega_t} \left(r(\underline{x}, t) \mathrm{d}\Omega - \mathrm{div} \left[\underline{q}(\underline{x}, t) \right] \right) \mathrm{d}S$$

Equation de conservation de l'énergie totale

- Densité massique d'énergie interne

$$\dot{E}_I(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\,\dot{e}_I(\underline{x}, t)\mathsf{d}\Omega$$

- Puissance des efforts intérieurs

$$P_{INT} = -\int_{\Omega_t} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}\ \mathsf{d}\Omega$$

- Apport de chaleur volumique et surfacique

$$Q(t) = \int_{\Omega_t} \left(r(\underline{x}, t)\mathsf{d}\Omega - \mathsf{div}\left[\underline{q}(\underline{x}, t)\right]\right)\mathsf{d}S$$

- Bilan d'énergie interne

$$\dot{E}_I = -P_{INT} + Q$$

- Forme locale du bilan d'énergie interne

$$\boxed{\int_{\Omega_t} \left(\rho(\underline{x}, t)\,\dot{e}_I(\underline{x}, t) - \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) - r(\underline{x}, t) + \mathsf{div}\left[\underline{q}(\underline{x}, t)\right]\right)\mathsf{d}\Omega = 0}$$

Equation de conservation de l'énergie totale

- Forme locale du premier principe de la thermodynamique

$$\boxed{\rho(\underline{x}, t)\,\dot{e}_I(\underline{x}, t) - \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x}, t) - r(\underline{x}, t) + \mathtt{div}\left[\underline{q}(\underline{x}, t)\right] = 0}$$

Thermodynamique du processus de déformation

- Conservation de la masse
- Dérivée matérielle locale
- Equations de bilan globale
- Equations de conservation globales
- Dérivée matérielle globale
- Equations de bilan locales
- Equation de conservation de l’énergie totale
- Equation de bilan d’entropie
- Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

Equation de bilan d'entropie

- Postulat

> Il existe une grandeur scalaire appelé entropie S.
> Elle mesure le "désordre" du système de particules.
> Nombre d'arrangements microscopiques possibles
> correspondant à l'état macroscopique

- Bilan d'entropie

$$\dot{S} = A_S + P_S$$

- A_S apport d'entropie
- P_S production d'entropie
- Postulat : Second principe de la thermodynamique

> La production d'entropie est positive

$$\boxed{P_S \geq 0}$$

Equation de bilan d'entropie

- Postulat : il existe une densité massique d'entropie

$$S(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) s(\underline{x}, t) \mathrm{d}\Omega \quad \text{et} \quad \dot{S}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t) \dot{s}(\underline{x}, t) \mathrm{d}\Omega$$

-
- Postulat : la production d'entropie est volumique

$$P_S(t) = \int_{\Omega_t} p_S(\underline{x}, t) \mathrm{d}\Omega$$

- Second principe de la thermodynamique

$$P_S(t) \geq 0$$

- Forme locale du second principe de la thermodynamique

$$\boxed{p_S(\underline{x}, t) \geq 0}$$

Equation de bilan d'entropie

- Apport extérieur d'entropie A_S
- Apport de chaleur Q
- Agitation moléculaire au niveau microscopique
- Pour le même apport de chaleur, l'augmentation du désordre sera moindre si le matériau est déjà chaud et ses molécules très agitées.
- Postulat

> Il existe une température absolue $T(\underline{x}, t)$
> telle que l'apport extérieur d'entropie est égal à
> l'apport de chaleur divisé par la température absolue

- Terme volumique et surfacique

$$\frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \quad \text{et} \quad -\frac{\underline{q}(\underline{x}, t).\underline{n}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)}$$

Equation de bilan d'entropie

- Apport extérieur d'entropie A_S

$$A_S(t) = \int_{\Omega_t} \frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \mathsf{d}\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \frac{\underline{q}(\underline{x}, t).\underline{n}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \mathsf{d}S$$

- Théorème de la divergence

$$\boxed{A_S(t) = \int_{\Omega_t} \left(\frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} - \mathsf{div}\left[\frac{\underline{q}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \right] \right) \mathsf{d}\Omega}$$

Equation de bilan d'entropie

- Production d'entropie

$$P_S(t) = \int_{\Omega_t} p_S(\underline{x}, t)\mathrm{d}\Omega$$

- Apports d'entropie

$$A_S(t) = \int_{\Omega_t} \left(\frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} - \mathtt{div} \left[\frac{\underline{q}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \right] \right) \mathrm{d}\Omega$$

- Dérivée matérielle

$$\dot{S}(t) = \int_{\Omega_t} \rho(\underline{x}, t)\dot{s}(\underline{x}, t)\mathrm{d}\Omega$$

- Bilan d'entropie

$$\dot{S} = A_S + P_S$$

- D'où

$$\int_{\Omega_t} \left(\rho(\underline{x}, t)\dot{s}(\underline{x}, t) - \frac{r(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} + \mathtt{div} \left[\frac{\underline{q}(\underline{x}, t)}{T(\underline{x}, t)} \right] - p_S(\underline{x}, t) \right) \mathrm{d}\Omega = 0$$

Equation de bilan d'entropie

- Calcul intermédiaire

$$\text{div}\left[\frac{\underline{q}(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)}\right] = \frac{\partial\left[\frac{q_j(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)}\right]}{\partial x_j} = \frac{1}{T(\underline{x},t)}\frac{\partial q_j(\underline{x},t)}{\partial x_j} - \frac{q_j(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)^2}\frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial x_j} = \frac{\text{div}\left[\underline{q}(\underline{x},t)\right]}{T(\underline{x},t)} - \frac{\underline{q}(\underline{x},t).\underline{\nabla}\,T(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)^2}$$

- Forme locale du bilan d'entropie

$$\boxed{\rho(\underline{x},t)\dot{s}(\underline{x},t) - \frac{r(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)} + \frac{\text{div}\left[\underline{q}(\underline{x},t)\right]}{T(\underline{x},t)} - \frac{\underline{q}(\underline{x},t).\underline{\nabla}\,T(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)^2} - p_S(\underline{x},t) = 0}$$

Thermodynamique du processus de déformation

Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Forme locale du bilan d'énergie interne

$$\rho(\underline{x},t)\dot{e}_I(\underline{x},t) - \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x},t) - r(\underline{x},t) + \texttt{div}\left[\underline{q}(\underline{x},t)\right] = 0$$

- Forme locale du bilan d'entropie

$$\rho(\underline{x},t)\dot{s}(\underline{x},t) - \frac{r(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)} + \frac{\texttt{div}\left[\underline{q}(\underline{x},t)\right]}{T(\underline{x},t)} - \frac{\underline{q}(\underline{x},t).\underline{\nabla}T(\underline{x},t)}{T(\underline{x},t)^2} - p_S(\underline{x},t) = 0$$

- Elimination de $r(\underline{x},t)$ très difficile à connaître

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho\left(\dot{e}_I - T\dot{s}\right) - \frac{\underline{q}.\underline{\nabla}T}{T} = Tp_S}$$

Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Définition de la densité massique d'énergie libre

$$\Psi(\underline{x}, t) = e_I(\underline{x}, t) - T(\underline{x}, t)s(\underline{x}, t)$$

- Dérivée matérielle

$$\dot{\Psi}(\underline{x}, t) = \dot{e}_I(\underline{x}, t) - \dot{T}(\underline{x}, t)s(\underline{x}, t) - T(\underline{x}, t)\dot{s}(\underline{x}, t)$$

- Combinaison des bilans d'énergie interne et d'entropie

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho\left(\dot{e}_I - T\dot{s}\right) - \frac{\underline{q}.\underline{\nabla} T}{T} = Tp_S$$

- Equation des bilans pour toute évolution possible

$$\boxed{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho\left(\dot{\Psi} + \dot{T}s\right) - \frac{\underline{q}.\underline{\nabla} T}{T} = Tp_S}$$

Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- La production d'entropie $p_S \geq 0$ caractérise l'irréversibilité du processus
- Tp_S homogène à une puissance appelée puissance dissipée volumique

$$D(\underline{x}, t) = T(\underline{x}, t) p_S(\underline{x}, t)$$

- Equation des bilans pour toute évolution possible

$$\boxed{\boxed{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho \left(\dot{\Psi} + \dot{T} s \right) - \frac{\underline{q} . \underline{\nabla} T}{T} = D}}$$

Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- ☐ Transformation

$$\underline{x} = \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

- ☐ Gradient de la transformation

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}} \left[\underline{\phi}(\underline{X}, t)\right]$$

- ☐ Variation de volume

$$J = \det\left[\underline{\underline{F}}\right] = \frac{\rho_0(\underline{X})}{\rho(\underline{x}, t)}$$

- ☐ ρ_0 masse volumique dans la configuration de référence

Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Expression du gradient de la vitesse $\underline{v}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{\phi}}(\underline{\phi}^{-1}(\underline{x}, t), t)$

$$\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} [\underline{v}(\underline{x}, t)] = \dot{\underline{\underline{F}}}.\underline{\underline{F}}^{-1}$$

- Taux de déformation

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \left(\dot{\underline{\underline{F}}}.\underline{\underline{F}}^{-1} + {}^{t}\underline{\underline{F}}^{-1}.\ {}^{t}\dot{\underline{\underline{F}}} \right)$$

- Terme de déformation

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}} [\underline{v}] = \mathrm{tr} \left[\underline{\underline{\sigma}}.\dot{\underline{\underline{F}}}.\underline{\underline{F}}^{-1} \right] = \mathrm{tr} \left[\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{\underline{\sigma}}.\dot{\underline{\underline{F}}} \right]$$

Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Tenseur de déformation de Green-Lagrange

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2}\left({}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}\right)$$

- Taux de déformation de Green-Lagrange

$$\dot{\underline{\underline{e}}} = \frac{1}{2}\left({}^t\dot{\underline{\underline{F}}}.\underline{\underline{F}} + {}^t\underline{\underline{F}}.\dot{\underline{\underline{F}}}\right) = {}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{d}}.\underline{\underline{F}}$$

- Tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff

$$\underline{\underline{\pi}} = J\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{\underline{\sigma}}.\, {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}$$

- On obtient les termes d'énergie élastique massiques

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}}}{2\rho} = \frac{\underline{\underline{\pi}} : \dot{\underline{\underline{e}}}}{2\rho_0}$$

Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Ecriture de l'équation des bilan dans la configuration de référence

$$J\underline{\underline{F}}^{-1}.\left(\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{d}}-\rho\left(\dot{\Psi}+\dot{T}s\right)-\frac{\underline{q}.\underline{\nabla}T}{T}\right).\underline{\underline{F}}=JTp_S$$

- Calcul

$$\underline{\underline{\sigma}}:\underline{\underline{d}}=\mathrm{tr}\left[\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{d}}\right]=\mathrm{tr}\left[\underline{\underline{\sigma}}.\ {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}.\ {}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{d}}\right]=\underline{\underline{\sigma}}.\ {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}:\ {}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{d}}$$

- D'où

$$\underbrace{J\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{\underline{\sigma}}.\ {}^t\underline{\underline{F}}^{-1}}_{\underline{\underline{\pi}}}:\underbrace{{}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{d}}.\underline{\underline{F}}}_{\underline{\underline{\dot{e}}}}-\underbrace{J\rho}_{\rho_0}\left(\dot{\Psi}+\dot{T}s\right)-\frac{\overbrace{J\underline{\underline{F}}^{-1}.\underline{q}}^{\underline{q}_0}.\overbrace{\underline{\nabla}T.\underline{\underline{F}}}^{\underline{\nabla}_X T}}{T}=\underbrace{JTp_S}_{Tp_{S_0}}$$

- Equation des bilans dans la configuration de référence

$$\boxed{\underline{\underline{\pi}}:\underline{\underline{\dot{e}}}-\rho_0\left(\dot{\Psi}+\dot{T}s\right)-\frac{\underline{q}_0.\underline{\nabla}_X T}{T}=Tp_{S_0}}$$

Equation des bilans et Inégalité de Clausius Duhem

- Second principe de la thermodynamique

$$Tp_S = D \geq 0$$

- Inegalité de Clausius Duhem

$$\boxed{\underbrace{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho\left(\dot{\Psi} + \dot{T}s\right)}_{D_I} - \underbrace{\frac{\underline{q}.\underline{\nabla} T}{T}}_{D_T} = D \geq 0}$$

- D_I : dissipation intrinsèque
- D_T : dissipation thermique
- Dans la configuration de référence

$$\boxed{\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} - \rho_0\left(\dot{\Psi} + \dot{T}s\right) - \frac{\underline{q_0}.\underline{\nabla_X} T}{T} \geq 0}$$

Plan de la séance

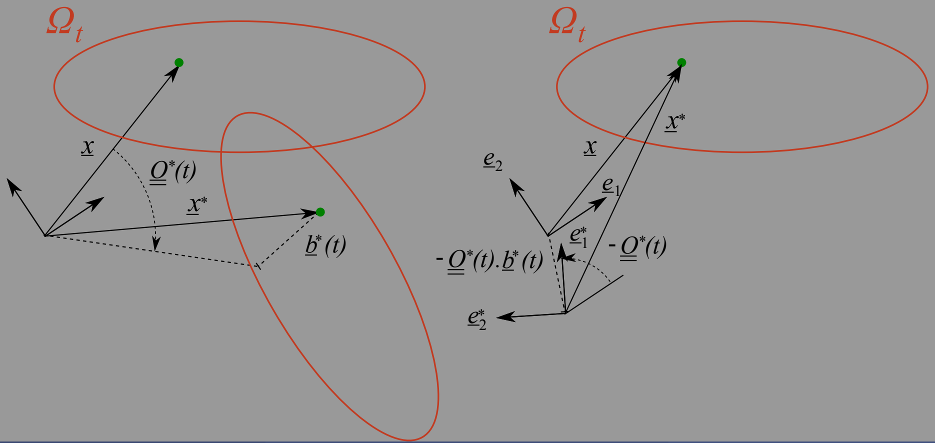
Objectivité

- Changement de référentiel
- Champs scalaires objectifs
- Champs de vecteurs objectifs
- Champs de tenseurs d'ordre 2 objectifs

Changement de référentiel

Rotation

$$\underline{x}^* = \underline{\underline{Q}}^*(t).\underline{x} + \underline{b}^*(t)$$

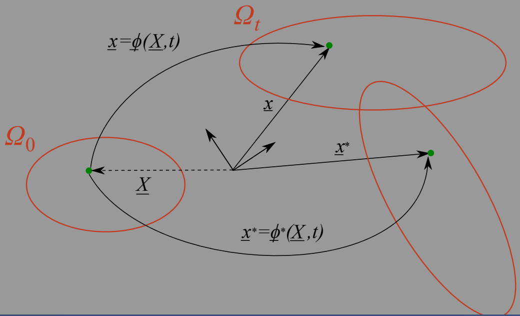


Changement de référentiel

Rotation

- ☐ Référentiels $\mathcal{R}$: $\underline{x} = x_i \underline{e}_i$ et $\mathcal{R}^*$: $\underline{x}^* = x_i^* \underline{e}_i^*$
- ☐ Rotation $\underline{\underline{O}}^*$ (tenseur orthogonal), translation $\underline{b}^*$

$$\underline{\phi}^*(\underline{X},t) = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\phi}(\underline{X},t) + \underline{b}^*(t) \Rightarrow \boxed{\underline{\underline{F}}^*(\underline{X},t) = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)}$$



Objectivité

- Changement de référentiel
- Champs scalaires objectifs
- Champs de vecteurs objectifs
- Champs de tenseurs d'ordre 2 objectifs

Champs scalaires objectifs

Elément de volume doit être objectif

- $d\Omega_t = \text{det}\left[\underline{\underline{F}}\right]\, d\Omega_0$
- $d\Omega_t^* = \text{det}\left[\underline{\underline{F}}^*\right]\, d\Omega_0$
- $\underline{\underline{F}}^*(\underline{X}, t) = \underline{\underline{Q}}^*(t).\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$
- $\text{det}\left[\underline{\underline{F}}^*(\underline{X}, t)\right] = \text{det}\left[\underline{\underline{Q}}^*(t).\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\right] = \underbrace{\text{det}\left[\underline{\underline{Q}}^*(t)\right]}_{=1} \text{det}\left[\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)\right]$
- D'où

$$\boxed{d\Omega_t = d\Omega_t^*}$$

- **Définition :** un champ scalaire $f(\underline{x}, t)$ est objectif ssi :

$$\boxed{f^*(\underline{x}^*, t) = f(\underline{x}, t)}$$

Champs scalaires objectifs

Exemples de champs scalaires objectifs par définition

- ☐ Masse volumique $\rho^*(\underline{x}^*, t) = \rho(\underline{x}, t)$
- ☐ Température $T^*(\underline{x}^*, t) = T(\underline{x}, t)$
- ☐ Densité massique d'énergie interne $e_I^*(\underline{x}^*, t) = e_I(\underline{x}, t)$
- ☐ Densité massique d'entropie $s^*(\underline{x}^*, t) = s(\underline{x}, t)$
- ☐ Apport volumique de chaleur $r^*(\underline{x}^*, t) = r(\underline{x}, t)$

Objectivité

- Changement de référentiel
- Champs scalaires objectifs
- Champs de vecteurs objectifs
- Champs de tenseurs d’ordre 2 objectifs

Champs de vecteurs objectifs

Vecteur matériel doit être objectif

- $\underline{dM} = \underline{\underline{F}}.\underline{dM_0}$
- $\underline{dM}^* = \underline{\underline{F}}^*.\underline{dM_0}$
- $\underline{\underline{F}}^* = \underline{\underline{Q}}^*(t).\underline{\underline{F}}$
- D'où

$$\boxed{\underline{dM}^* = \underline{\underline{Q}}^*(t).\underline{dM}}$$

- **Définition :** un champ vectoriel $\underline{f}(\underline{x}, t)$ est objectif ssi :

$$\boxed{\underline{f}^*(\underline{x}^*, t) = \underline{\underline{Q}}^*(t).\underline{f}(\underline{x}, t)}$$

Champs de vecteurs objectifs

Exemples de champs de vecteur NON objectifs

- Position non objectif

$$\underline{\phi}^*(\underline{X},t) = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\phi}(\underline{X},t) + \underline{b}^*(t)$$

- Vitesse

$$\underline{V}^* = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{V} + \dot{\underline{\underline{O}}}^*(t).\underline{\phi}(\underline{X},t) + \dot{\underline{b}}^*(t)$$

- Or

$$\underline{\phi}(\underline{X},t) = {}^T\underline{\underline{O}}^*(t).\left(\underline{\phi}^*(\underline{X},t) - \underline{b}^*(t)\right)$$

- Champ de vitesse non objectif

$$\boxed{\underline{V}^* = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{V} + \underbrace{\dot{\underline{\underline{O}}}^*(t).{}^T\underline{\underline{O}}^*(t)}_{\text{anti-sym}}.\left(\underline{\phi}^*(\underline{X},t) - \underline{b}^*(t)\right) + \dot{\underline{b}}^*(t)}$$

Champs de vecteurs objectifs

Exemples de champs de vecteur objectifs

- Champ scalaire objectif $f^*(\underline{x}^*, t) = f(\underline{x}, t)$
- Gradient

$$\underline{\nabla}_{\underline{x}^*}\left[f^*(\underline{x}^*, t)\right] = \underline{\nabla}_{\underline{x}}\left[f(\underline{x}, t)\right] \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}^*}$$

- Par ailleurs

$$\underline{x}^* = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{x} + \underline{b}^*(t) \Rightarrow \underline{x} = {}^T\underline{\underline{O}}^*(t).\left(\underline{x}^* - \underline{b}^*(t)\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}^*} = {}^T\underline{\underline{O}}^*(t)}$$

- D'où

$$\begin{aligned} \underline{\nabla}_{\underline{x}^*}\left[f^*(\underline{x}^*, t)\right] &= \underline{\nabla}_{\underline{x}}\left[f(\underline{x}, t)\right] \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}^*} = \underline{\nabla}_{\underline{x}}\left[f(\underline{x}, t)\right] \cdot {}^T\underline{\underline{O}}^*(t) \\ &= \boxed{\underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\nabla}_{\underline{x}}\left[f(\underline{x}, t)\right]} \end{aligned}$$

- Le gradient d'un champ scalaire objectif est objectif

Champs de vecteurs objectifs

Exemples de champs de vecteur objectifs

- ☐ Gradient de la masse volumique $\underline{\nabla}\rho$
- ☐ Gradient de température $\underline{\nabla}T$

Champs de vecteur objectifs par définition

- ☐ Flux de chaleur

$$\underline{q}^*(\underline{x}^*, t) = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{q}(\underline{x}, t)$$

Objectivité

- Changement de référentiel
- Champs scalaires objectifs
- Champs de vecteurs objectifs
- Champs de tenseurs d’ordre 2 objectifs

Champs de tenseurs d'ordre 2 objectifs

Tenseur matériel doit être objectif

- $\underline{dM_1} \otimes \underline{dM_2}$
- $\underline{dM_1^*} = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{dM_1}$
- $\underline{dM_2^*} = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{dM_2} = \underline{dM_2}.\,^T\underline{\underline{O}}^*(t)$
- D'où

$$\underline{dM_1^*} \otimes \underline{dM_2^*} = \underline{\underline{O}}^*(t).\left[\underline{dM_1} \otimes \underline{dM_2}\right].\,^T\underline{\underline{O}}^*(t)$$

- **Définition :** un champ tensoriel d'ordre 2 $\underline{\underline{f}}(\underline{x}, t)$ est objectif ssi :

$$\boxed{\underline{\underline{f}}^*(\underline{x}^*, t) = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\underline{f}}(\underline{x}, t).\,^T\underline{\underline{O}}^*(t)}$$

Champs de tenseurs d'ordre 2 objectifs

Exemples de tenseur d'ordre 2 NON objectifs

- Gradient de la transformation non objectif

$$\underline{\underline{F}}^*(\underline{X},t) = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)$$

- Gradient du champ de vitesse non objectif

$$\underline{V}^* = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{V} + \dot{\underline{\underline{O}}}^*(t).\underline{\phi}(\underline{X},t) + \dot{\underline{b}}^*(t)$$

$$\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}^*}\underline{V}^* = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\underline{V}.\underbrace{\frac{\partial \underline{x}}{\partial \underline{x}^*}}_{{}^T\underline{\underline{O}}^*(t)} + \dot{\underline{\underline{O}}}^*(t).\underbrace{\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{X}}\underline{\phi}}_{{}^T\underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\underline{F}}^*}.\underbrace{\frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{x}^*}}_{\left[\underline{\underline{F}}^*\right]^{-1}}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}^*}\underline{V}^* = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\underline{V}.{}^T\underline{\underline{O}}^*(t) + \dot{\underline{\underline{O}}}^*(t).{}^T\underline{\underline{O}}^*(t)}$$

Champs de tenseurs d'ordre 2 objectifs

Exemples de tenseur d'ordre 2 NON objectifs

- Tenseur de dilatation de Cauchy non objectif

$$\underline{\underline{C}}^* = {}^T\underline{\underline{F}}^*.\underline{\underline{F}}^* = {}^T\underline{\underline{F}}.\underbrace{{}^T\underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\underline{O}}^*(t)}_{\underline{\underline{1}}}.\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{C}}$$

- Chaque composante scalaire du tenseur est objective

Champs de tenseurs d’ordre 2 objectifs

Exemples de tenseur d’ordre 2 objectifs

- Taux de déformation objectif

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\underline{V} + {}^T\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\underline{V}\right] \text{ et } \underline{\underline{d}}^* = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}^*}\underline{V}^* + {}^T\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}^*}\underline{V}^*\right]$$

- Gradient du champ de vitesse

$$\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}^*}\underline{V}^* = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\underline{\nabla}}_{\underline{x}}\underline{V}.\,{}^T\underline{\underline{O}}^*(t) + \underbrace{\dot{\underline{\underline{O}}}^*(t).\,{}^T\underline{\underline{O}}^*(t)}_{A.S}$$

- D’où

$$\boxed{\underline{\underline{d}}^* = \underline{\underline{O}}^*(t).\underline{\underline{d}}.\,{}^T\underline{\underline{O}}^*(t)}$$

Champs de tenseurs d'ordre 2 objectifs

Tenseur d'ordre 2 objectifs par définition

- Tenseur de contrainte de Cauchy objectif

$$\underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{Q}}^*(t).\underline{\underline{\sigma}}.\,^T\underline{\underline{Q}}^*(t)$$

Plan de la séance

Relations constitutives (comportement)

Notations

Histoire d'une grandeur

- ☐ Histoire de la grandeur en $\underline{X}$ fixé jusqu'à l'instant t

$$g_{\underline{X}} : \tau \in [0, t] \mapsto g(\underline{X}, \tau)$$

  - Exemple : trajectoire d'une particule $\underline{X}$, $\underline{\phi}_{\underline{X}}$

- ☐ Distribution d'une grandeur à l'instant t

$$g_t : \underline{X} \in \Omega_0 \mapsto g(\underline{X}, t)$$

  - Exemple : configuration à l'instant t, $\underline{\phi}_t$

- ☐ Histoire de la distribution sur Ω_0 jusqu'à l'instant t

$$g : (\underline{X}, \tau) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto g(\underline{X}, \tau)$$

  - Exemple : histoire de la configuration, $\underline{\phi}$

Relations constitutives (comportement)

Définition des processus

Processus jusqu'à t sur Ω_0

Inconnues principales

- Histoire de la distribution de la position

$$\underline{\phi} : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto \underline{\phi}(\underline{X}, t)$$

- Histoire de la distribution de température

$$T : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto T(\underline{X}, t)$$

Relations constitutives (comportement)

Données

Données

- ☐ Histoire de la distribution de forces massiques

$$f_m : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto f_m(\underline{X}, t)$$

- ☐ Histoire de la distribution des appports volumique de chaleur

$$r : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto r(\underline{X}, t)$$

Relations constitutives (comportement)

Grandeurs constitutives

Inconnues auxiliaires réduites

- ☐ Histoire de la distribution de densité massique d'énergie interne

$$e_I : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto e_I(\underline{X}, t)$$

- ☐ Histoire de la distribution des flux de chaleur

$$\underline{q} : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto \underline{q}(\underline{X}, t)$$

- ☐ Histoire de la distribution des contraintes de Cauchy

$$\underline{\underline{\sigma}} : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto \underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}, t)$$

- ☐ Histoire de la distribution de densité massique d'entropie

$$s : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto s(\underline{X}, t)$$

- ☐ Histoire de la distribution de densité volumique de production d'entropie

$$p_s : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto p_s(\underline{X}, t)$$

Relations constitutives (comportement)

Relations constitutives

Relation générale : inconnues principales vs auxiliaires

Fonctionnelle des histoires des distributions $\underline{\phi}, T$

- $\underline{\phi} : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto \underline{\phi}(\underline{X}, t)$
- $T : (\underline{X}, t) \in \Omega_0 \times [0, t] \mapsto T(\underline{X}, t)$

$$\boxed{\mathcal{F} : \left[\underline{\phi}, T\right] \in \mathcal{C}(\Omega_0 \times [0, t], \mathbb{R}^3) \times \mathcal{C}(\Omega_0 \times [0, t], \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\Omega_0 \times [0, t], \mathbb{R})}$$

- Densité massique d'énergie libre : $\mathcal{E}\left[\underline{\phi}, T\right] = e_I$
- Flux de chaleur : $\mathcal{Q}\left[\underline{\phi}, T\right] = \underline{q}$
- Contrainte de Cauchy : $\Sigma\left[\underline{\phi}, T\right] = \underline{\underline{\sigma}}$
- Densité massique d'entropie : $\mathcal{S}\left[\underline{\phi}, T\right] = s$
- Densité volumique de production d'entropie : $\mathcal{P}\left[\underline{\phi}, T\right] = p_s$

Relations constitutives

Relation générale : inconnues principales vs auxiliaires

Ce comportement est non local

Relations constitutives

Hypothèse des matériaux simples : comportement local

Inconnues auxiliaires en $\underline{X}$ à l'instant t fonctions locales du processus

Inconnues principales en $\underline{X}$ à l'instant t dans le voisinage seulement (1ier gradient)

Histoires : $\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla \phi}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}$

- $\underline{\underline{\nabla \phi}}_{\underline{X}} : \tau \in [0, t] \mapsto \underline{\underline{\nabla \phi}}(\underline{X}, t)$
- $\underline{\phi}_{\underline{X}} : \tau \in [0, t] \mapsto \underline{\phi}(\underline{X}, t)$
- $T_{\underline{X}} : \tau \in [0, t] \mapsto T(\underline{X}, t)$
- $\underline{\nabla} T_{\underline{X}} : \tau \in [0, t] \mapsto \underline{\nabla} T(\underline{X}, t)$

Relations constitutives

Hypothèse des matériaux simples : comportement local

- Fonctionnelle d'histoire

$$\boxed{\mathcal{F}_{\underline{X},t} : \left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla\phi}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] \in \mathcal{C}([0,t])^4 \to \mathbb{R}^p}$$

- Energie libre : $\mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla\phi}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = e_I(\underline{x}, t)$
- Flux de chaleur : $\mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla\phi}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = \underline{q}(\underline{x}, t)$
- Contrainte de Cauchy : $\Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla\phi}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$
- Densité massique d'entropie : $\mathcal{S}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla\phi}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = s(\underline{x}, t)$
- Production d'entropie : $\mathcal{P}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla\phi}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = p_s(\underline{x}, t)$

Relations constitutives (comportement)

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Changement d'observateur $\forall \tau \in [0, t]$

$$\underline{x}^* = \underline{\underline{Q}}^*(\tau).\underline{x} + \underline{b}^*(\tau)$$

- Densité massique d'énergie libre : objectif

$$\boxed{e_I^*(\underline{\phi}^*(\underline{X}, \tau), \tau) = e_I(\underline{\phi}(\underline{X}, \tau), \tau)}$$

- Relations constitutives, $\forall \underline{\underline{Q}}^*(\tau), \forall \underline{b}^*(\tau)$

$$\mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla \phi}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = e_I(\underline{x}, t)$$

$$\mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}^*_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla \phi}}^*_{\underline{X}}, T^*_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}^*_{\underline{X}}\right] = e_I^*(\underline{x}, t)$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Relations constitutives, $\forall \underline{\underline{Q}}^*(\tau), \forall \underline{b}^*(\tau)$

$$\mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla \phi}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = \mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}^*_{\underline{X}}, \underline{\underline{\nabla \phi}}^*_{\underline{X}}, T^*_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}^*_{\underline{X}}\right]$$

- Premier choix : l'observateur * suit la particule sans tourner

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}}^*(\tau) = \underline{\underline{1}} \text{ et } \forall \tau \in [0, t], \underline{b}^*(\tau) = -\underline{\phi}(\underline{X}, \tau)$$

$$\underline{\phi}^*_{\underline{X}} = 0 \;\middle|\; \underline{\underline{F}}^*_{\underline{X}} = \underline{\underline{F}}_{\underline{X}} \;\middle|\; T^*_{\underline{X}} = T_{\underline{X}} \;\middle|\; \underline{\nabla T}^*_{\underline{X}} = \underline{\nabla T}_{\underline{X}}$$

- D'où

$$\forall \underline{\phi}_{\underline{X}}, \mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = \mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[0, \underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right]$$

- $\Rightarrow \mathcal{E}_{\underline{X},t}$ indépendant de la position $\underline{\phi}_{\underline{X}}$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Théorème de décomposition ($\underline{\underline{R}}$: rotation, $\underline{\underline{U}}$: déformation pure)

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X},\tau) = \underline{\underline{R}}(\underline{X},\tau).\underline{\underline{U}}(\underline{X},\tau)$$

- Deuxième choix : l'observateur * tourne avec la particule

$$\Rightarrow \forall\,\tau \in [0,t]\,,\ \underline{\underline{Q}}^*(\tau) = {}^T\underline{\underline{R}}(\underline{X},\tau) \text{ et } \underline{b}^*(\tau) = 0$$

$$\underline{\underline{F}}^*_{\underline{X}} = \underline{\underline{U}}_{\underline{X}} \;\Big|\; T^*_{\underline{X}} = T_{\underline{X}} \;\Big|\; \underline{\nabla}\,T^*_{\underline{X}} = \underline{\nabla}\,T_{\underline{X}}$$

- D'où

$$\forall\,\underline{\underline{R}}_{\underline{X}},\ \mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\left[\underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}}\right]_{\underline{X}},T_{\underline{X}},\underline{\nabla}\,T_{\underline{X}}\right] = \mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}},T_{\underline{X}},\underline{\nabla}\,T_{\underline{X}}\right]$$

- $\Rightarrow \mathcal{E}_{\underline{X},t}$ indépendant de $\underline{\underline{R}}_{\underline{X}}$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- ☐ Energie libre : $\mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = e_I(\underline{x}, t)$
- ☐ Densité massique d'entropie : $\mathcal{S}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = s(\underline{x}, t)$
- ☐ Production d'entropie : $\mathcal{P}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = p_s(\underline{x}, t)$

La densité massique d'énergie libre, d'entropie et la densité volumique de production d'entropie ne dépendent pas de la rotation de la matrière

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Flux de chaleur : objectif

$$\underline{q}^*(\underline{\phi}^*(\underline{X},\tau),\tau) = \underline{\underline{Q}}^*(t).\underline{q}(\underline{\phi}(\underline{X},\tau),\tau)$$

- Relations constitutives, $\forall\, \underline{\underline{Q}}^*(\tau), \forall\, \underline{b}^*(\tau)$

$$\mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = \underline{q}(\underline{x}, t)$$

$$\mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}^*_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}^*_{\underline{X}}, T^*_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}^*_{\underline{X}}\right] = \underline{q}^*(\underline{x}, t)$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Relations constitutives, $\forall \underline{\underline{Q}}^*(\tau), \forall \underline{b}^*(\tau)$

$$\mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = {}^T\underline{\underline{Q}}^*(t).\mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}^*_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}^*_{\underline{X}}, T^*_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T^*_{\underline{X}}\right]$$

- Premier choix : l'observateur * suit la particule sans tourner

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}}^*(\tau) = \underline{\underline{1}} \text{ et } \forall \tau \in [0, t], \underline{b}^*(\tau) = -\underline{\phi}(\underline{X}, \tau)$$

$$\underline{\phi}^*_{\underline{X}} = 0 \;\Big|\; \underline{\underline{F}}^*_{\underline{X}} = \underline{\underline{F}}_{\underline{X}} \;\Big|\; T^*_{\underline{X}} = T_{\underline{X}} \;\Big|\; \underline{\nabla} T^*_{\underline{X}} = \underline{\nabla} T_{\underline{X}}$$

- D'où

$$\forall \underline{\phi}_{\underline{X}}, \mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = \mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[0, \underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right]$$

- $\Rightarrow \mathcal{Q}_{\underline{X},t}$ indépendant de la position $\underline{\phi}_{\underline{X}}$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Théorème de décomposition ($\underline{\underline{R}}$: rotation, $\underline{\underline{U}}$: déformation pure)

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X}, \tau) = \underline{\underline{R}}(\underline{X}, \tau).\underline{\underline{U}}(\underline{X}, \tau)$$

- Deuxième choix : l'observateur * tourne avec la particule

$$\Rightarrow \forall \tau \in [0, t]\,,\; \underline{\underline{Q}}^*(\tau) = {}^T\underline{\underline{R}}(\underline{X}, \tau) \text{ et } \underline{b}^*(\tau) = 0$$

$$\underline{\underline{F}}^*_{\underline{X}} = \underline{\underline{U}}_{\underline{X}} \;\Big|\; T^*_{\underline{X}} = T_{\underline{X}} \;\Big|\; \underline{\nabla}\, T^*_{\underline{X}} = \underline{\nabla}\, T_{\underline{X}}$$

- D'où

$$\mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla}\, T_{\underline{X}}\right] = \underline{\underline{R}}(\underline{X}, t).\mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla}\, T_{\underline{X}}\right]$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Flux de chaleur : $\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t).\mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = \underline{q}(\underline{x}, t)$

L'histoire de la rotation de la matière n'intervient pas

Seule la rotation actuelle de la matière intervient

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Contrainte de Cauchy : objectif

$$\underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{\phi}^*(\underline{X},\tau),\tau) = \underline{\underline{Q}}^*(t).\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\phi}(\underline{X},\tau),\tau).\,^T\underline{\underline{Q}}^*(t)$$

- Relations constitutives, $\forall\,\underline{\underline{Q}}^*(\tau)$, $\forall\,\underline{b}^*(\tau)$

$$\Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla}\,T_{\underline{X}}\right] = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$$

$$\Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}^*_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}^*_{\underline{X}}, T^*_{\underline{X}}, \underline{\nabla}\,T^*_{\underline{X}}\right] = \underline{\underline{\sigma}}^*(\underline{x},t)$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Relations constitutives, $\forall \underline{\underline{Q}}^*(\tau), \forall \underline{b}^*(\tau)$

$$\Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = {}^{T}\underline{\underline{Q}}^*(t).\Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}^*_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}^*_{\underline{X}}, T^*_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}^*_{\underline{X}}\right].\underline{\underline{Q}}^*(t)$$

- Premier choix : l'observateur * suit la particule sans tourner

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q}}^*(\tau) = \underline{\underline{1}} \text{ et } \forall \tau \in [0,t], \underline{b}^*(\tau) = -\underline{\phi}(\underline{X},\tau)$$

$$\underline{\phi}^*_{\underline{X}} = 0 \;\Big|\; \underline{\underline{F}}^*_{\underline{X}} = \underline{\underline{F}}_{\underline{X}} \;\Big|\; T^*_{\underline{X}} = T_{\underline{X}} \;\Big|\; \underline{\nabla T}^*_{\underline{X}} = \underline{\nabla T}_{\underline{X}}$$

- D'où

$$\forall \underline{\phi}_{\underline{X}}, \Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\phi}_{\underline{X}}, \underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = \Sigma_{\underline{X},t}\left[0, \underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right]$$

- $\Rightarrow \Sigma_{\underline{X},t}$ indépendant de la position $\underline{\phi}_{\underline{X}}$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Théorème de décomposition ($\underline{\underline{R}}$: rotation, $\underline{\underline{U}}$: déformation pure)

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X},\tau) = \underline{\underline{R}}(\underline{X},\tau).\underline{\underline{U}}(\underline{X},\tau)$$

- Deuxième choix : l'observateur * tourne avec la particule

$$\Rightarrow \forall \tau \in [0,t]\,,\ \underline{\underline{Q}}^*(\tau) = {}^T\underline{\underline{R}}(\underline{X},\tau) \text{ et } \underline{b}^*(\tau) = 0$$

$$\underline{\underline{F}}^*_{\underline{X}} = \underline{\underline{U}}_{\underline{X}} \;\Big|\; T^*_{\underline{X}} = T_{\underline{X}} \;\Big|\; \underline{\nabla T}^*_{\underline{X}} = \underline{\nabla T}_{\underline{X}}$$

- D'où

$$\Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{F}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right] = \underline{\underline{R}}(\underline{X},t).\Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla T}_{\underline{X}}\right].{}^T\underline{\underline{R}}(\underline{X},t)$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Contrainte : $\underline{\underline{R}}(\underline{X},t).\Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right].{}^{T}\underline{\underline{R}}(\underline{X},t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$

L'histoire de la rotation de la matière n'intervient pas

Seule la rotation actuelle de la matière intervient

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Energie libre : $\mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \nabla T_{\underline{X}}\right] = e_I(\underline{x}, t)$
- Densité massique d'entropie : $\mathcal{S}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \nabla T_{\underline{X}}\right] = s(\underline{x}, t)$
- Production d'entropie : $\mathcal{P}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \nabla T_{\underline{X}}\right] = p_s(\underline{x}, t)$
- Flux de chaleur : $\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t).\mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \nabla T_{\underline{X}}\right] = \underline{q}(\underline{x}, t)$
- Contrainte : $\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t).\Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \nabla T_{\underline{X}}\right].\,^T\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$

L'histoire de la rotation de la matière n'intervient pas

Seule la rotation actuelle de la matière intervient

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Passage dans la configuration de référence

$$\underline{\underline{F}}(\underline{X},t)=\underline{\underline{R}}(\underline{X},t).\underline{\underline{U}}(\underline{X},t)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)=\underline{\underline{U}}(\underline{X},t)^{-1}.\,{}^{T}\underline{\underline{R}}(\underline{X},t)\\ {}^{T}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t)=\underline{\underline{R}}(\underline{X},t).\,{}^{T}\underline{\underline{U}}(\underline{X},t)^{-1}\end{array}\right.$$

$$J=\det\left[\underline{\underline{F}}\right]=\det\left[\underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}}\right]=\underbrace{\det\left[\underline{\underline{R}}\right]}_{1}.\det\left[\underline{\underline{U}}\right]$$

$$\boxed{\underline{\underline{C}}(\underline{X},t)={}^{T}\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}={}^{T}\underline{\underline{U}}.\underline{\underline{U}}}$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Passage dans la configuration de référence

$$e_0(\underline{X}, t) = e_I(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t)$$

$$\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) = {}^T\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}} = {}^T\underline{\underline{U}}.\underline{\underline{U}}$$

$$\mathcal{E}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = e_I(\underline{x}, t)$$

$$\boxed{\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = e_0(\underline{X}, t)}$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Passage dans la configuration de référence

$$s_0(\underline{X}, t) = s(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t)$$

$$\underline{\underline{C}}(\underline{X}, t) = {}^T\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}} = {}^T\underline{\underline{U}}.\underline{\underline{U}}$$

$$\mathcal{S}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = s(\underline{x}, t)$$

$$\boxed{\mathcal{S}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = s_0(\underline{X}, t)}$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Passage dans la configuration de référence

$$p_0(\underline{X},t) = J(\underline{X},t)p_s(\underline{\phi}(\underline{X},t),t)$$

$$\underline{\underline{C}}(\underline{X},t) = {}^T\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}} = {}^T\underline{\underline{U}}.\underline{\underline{U}}$$

$$\mathcal{P}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla}T_{\underline{X}}\right] = p_s(\underline{x},t)$$

$$\boxed{\mathcal{P}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla}T_{\underline{X}}\right] = p_0(\underline{X},t)}$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Passage dans la configuration de référence

$$\underline{q}_0(\underline{X},t) = J(\underline{X},t)\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t).\underline{q}(\underline{\phi}(\underline{X},t),t)$$

$$\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X},t) = \underline{\underline{U}}(\underline{X},t)^{-1}.\,{}^{T}\underline{\underline{R}}(\underline{X},t)$$

$$\underline{\underline{R}}(\underline{X},t).\mathcal{Q}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = \underline{q}(\underline{x},t)$$

$$\boxed{\mathcal{Q}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = \underline{q}_0(\underline{X},t)}$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Passage dans la configuration de référence

$$\underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t) = J(\underline{X}, t)\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t).\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\phi}(\underline{X}, t), t).\,{}^{T}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t)$$

$$\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{U}}(\underline{X}, t)^{-1}.\,{}^{T}\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t)$$

$${}^{T}\underline{\underline{F}}^{-1}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{R}}(\underline{X}, t).\,{}^{T}\underline{\underline{U}}(\underline{X}, t)^{-1}$$

$$\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t).\Sigma_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{U}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right].\,{}^{T}\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$$

$$\boxed{\Pi^{0}_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t)}$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Choix fréquent

$$\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \cancel{\underline{\nabla} T_{\underline{X}}}\right] = e_0(\underline{X}, t)$$

$$\mathcal{S}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \cancel{\underline{\nabla} T_{\underline{X}}}\right] = s_0(\underline{X}, t)$$

$$\mathcal{P}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = p_0(\underline{X}, t)$$

$$\mathcal{Q}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \underline{\nabla} T_{\underline{X}}\right] = \underline{q}_0(\underline{X}, t)$$

$$\Pi^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}, \cancel{\underline{\nabla} T_{\underline{X}}}\right] = \underline{\underline{\pi}}(\underline{X}, t)$$

- Comportement matériau : $\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{S}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{P}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{Q}^0_{\underline{X},t}, \Pi^0_{\underline{X},t}$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Densité massique d'énergie libre

$$\psi_0(\underline{X}, t) = e_0(\underline{X}, t) - T(\underline{X}, t)s(\underline{X}, t)$$

$$\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = e_0(\underline{X}, t)$$

$$\mathcal{S}^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = s_0(\underline{X}, t)$$

- D'où

$$\boxed{\Psi^0_{\underline{X},t}\left[\underline{\underline{C}}_{\underline{X}}, T_{\underline{X}}\right] = \psi_0(\underline{X}, t)}$$

Principe d'indifférence matérielle

Comportement indépendant de l'observateur

- Grandeurs constitutives
- Observables

$$\boxed{\underbrace{\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} - \rho\left(\dot{\Psi} + \dot{T}s\right)}_{D_I} - \underbrace{\frac{\underline{q}.\underline{\nabla}\, T}{T}}_{D_T} = D \geq 0}$$

$$\boxed{\underline{\underline{\pi}} : \underline{\underline{\dot{e}}} - \rho_0\left(\dot{\Psi}_0 + \dot{T}s_0\right) - \frac{\underline{q}_0.\underline{\nabla}_X T}{T} \geq 0}$$

- Comportement matériau : $\mathcal{E}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{S}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{P}^0_{\underline{X},t}, \mathcal{Q}^0_{\underline{X},t}, \Pi^0_{\underline{X},t}$
- Doit vérifier l'équation des bilans pour toute évolution possible