

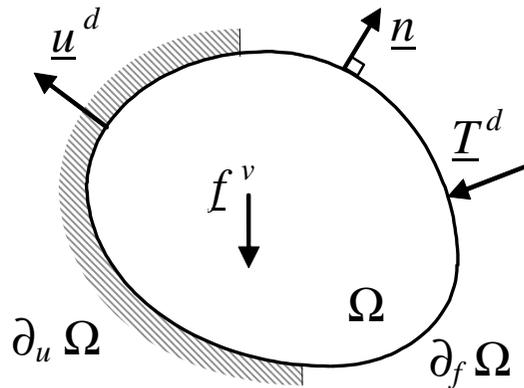
*Cours Géomécanique et Géotechnique Avancée*  
Ecole des Ponts Paris Tech –2020

*Contraintes et déplacements autour des  
ouvrages souterrains*

Amade Pouya  
ENPC – Novembre 2020

# Problème du corps solide déformable

Problème : déterminer les champs de contraintes et de déplacements résultant de l'application des forces volumiques, surfaciques sur le contour et des déplacements imposés au contour.



Equations à vérifier: équilibre, conditions aux limites en forces et en déplacements et loi constitutive du matériau

$$\text{div} \underline{\sigma}(\underline{x}) + \underline{f}^v = 0,$$

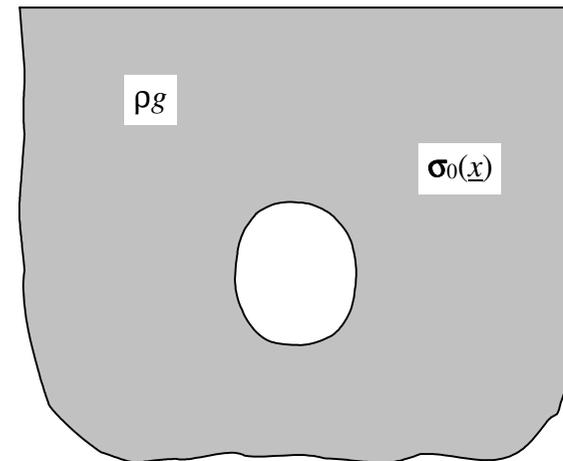
$$\forall \underline{x} \in \partial_f \Omega; \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = \underline{T}^d$$

$$\forall \underline{x} \in \partial_u \Omega; \underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}^d(\underline{x})$$

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \mathbb{C} : [\underline{\varepsilon}(\underline{x}) - \underline{\varepsilon}^p(\underline{x})], \quad \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u})$$

Spécificités du problème des ouvrages souterrains:

- Milieu semi-infini
- Existence de contraintes initiales
- Origine du chargement : action du creusement au cours de laquelle on enlève une partie du système



# Problème non pesant

Etat de contraintes initiales  $\underline{\sigma}_0$  sert d'origine des déplacements. Les déplacements et les déformations sont supposés nuls dans cet état:

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\sigma}_0(\underline{x}) + \mathbb{C} : \underline{\varepsilon}^e(\underline{x})$$

La contrainte après creusement  $\underline{\sigma}$  et la contraintes initiale  $\underline{\sigma}_0$  équilibrent le même champ de forces volumiques (pesanteur):

$$\text{div } \underline{\sigma}(\underline{x}) + \underline{f}^v = 0$$

$$\text{div } \underline{\sigma}_0(\underline{x}) + \underline{f}^v = 0$$

On définit:  $\underline{\bar{\sigma}}(\underline{x}) = \underline{\sigma}(\underline{x}) - \underline{\sigma}_0(\underline{x})$

Et on écrit les équations pour cette variation de la contrainte sur la partie du qui reste après le creusement. On trouve les équations d'un corps solide non pesant (pas de force volumique) :

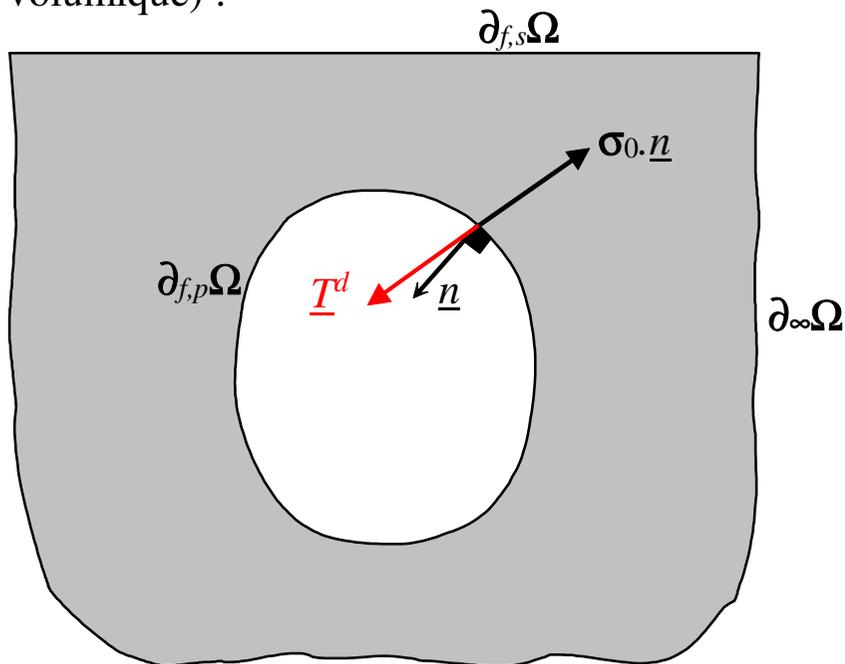
$$\text{div } \underline{\bar{\sigma}}(\underline{x}) = 0,$$

$$\forall \underline{x} \in \partial_{f,p} \Omega; \underline{\bar{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = \underline{T}^d = -\underline{\sigma}_0(\underline{x}) \cdot \underline{n}$$

$$\forall \underline{x} \in \partial_{f,s} \Omega; \underline{\bar{\sigma}}(\underline{x}) \cdot \underline{n} = 0$$

$$\lim_{\|\underline{x}\| \rightarrow \infty} \underline{u}(\underline{x}) = 0$$

$$\underline{\bar{\sigma}}(\underline{x}) = \mathbb{C} : [\underline{\varepsilon}(\underline{x}) - \underline{\varepsilon}^p(\underline{x})], \quad \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \underline{u} + {}^t \nabla \underline{u})$$

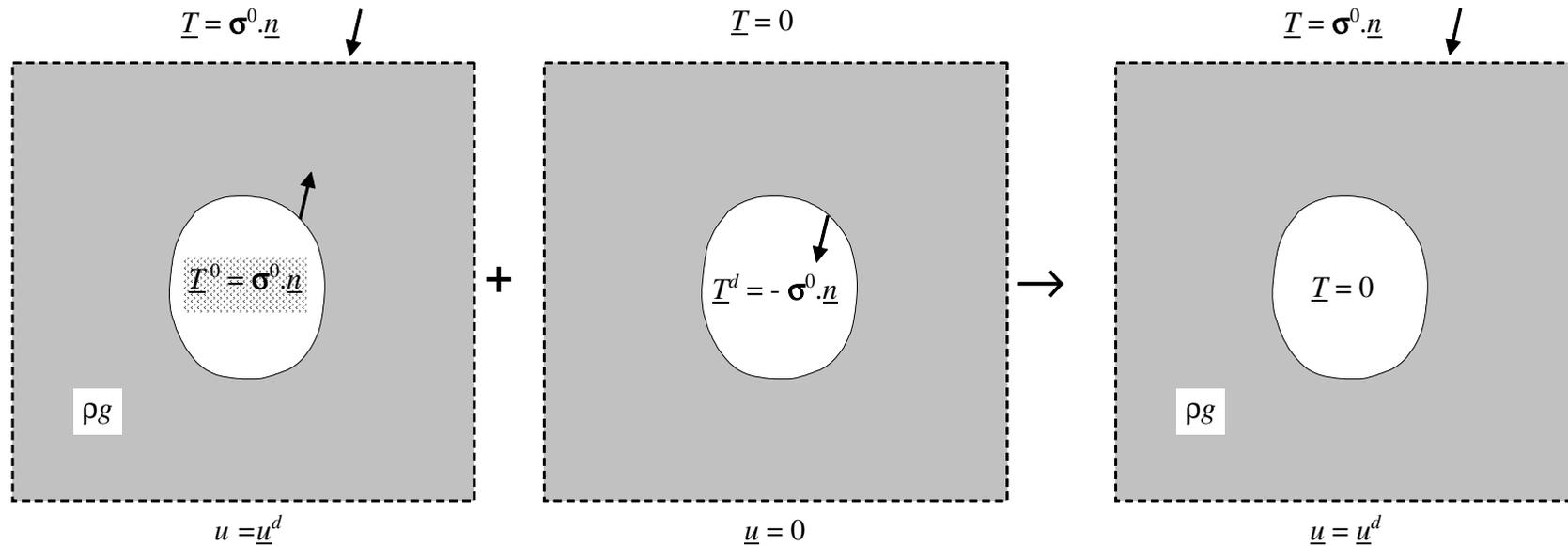


Effort de de creusement: l'opposée des forces surfaciques  $\underline{\sigma}_0(\underline{x}) \cdot \underline{n}$  existant avant le creusement (efforts internes).

$\underline{n}$  : sortant de la partie restante du massif

# Action de creusement

Action de creusement: appliquer les forces surfaciques  $-\sigma_0(\underline{x}).\underline{n}$  sur la paroi pour annuler l'effet des efforts internes appliqués sur cette paroi par la partie à excaver.



Avant le creusement

Action de creusement

Massif avec tunnel creusé

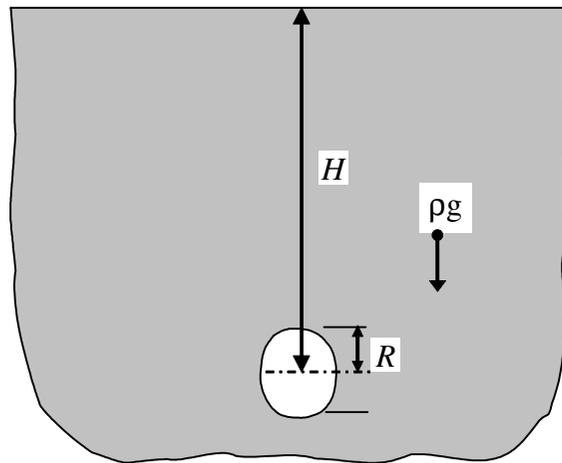
# Ouvrages profonds

Un ouvrage est considéré profond si son extension dans le plan verticale est négligeable devant sa profondeur :  $R \ll H$

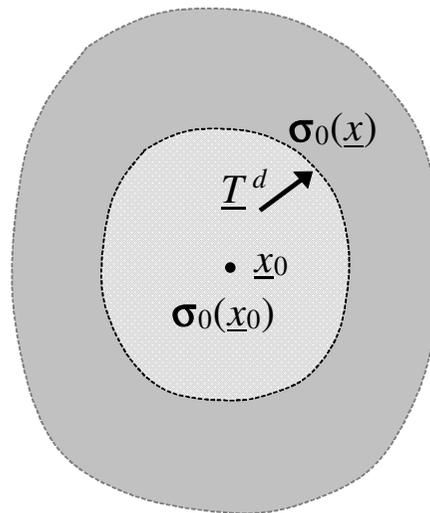
De ce fait la variation de  $\sigma_0(\underline{x})$  le long de la paroi est négligeable par rapport à la valeur de cette contrainte au centre de l'ouvrage, le point  $\underline{x}_0$ .

Ceci justifie, pour la modélisation de l'action du creusement:

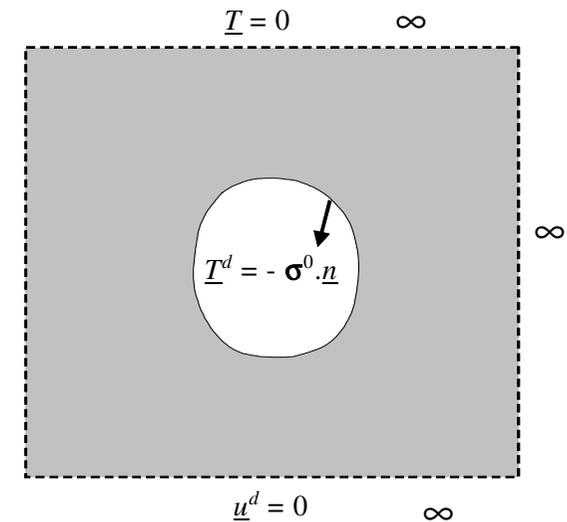
- 1) Prendre la contrainte  $\sigma_0(\underline{x})$  sur la paroi constante et égale à  $\sigma_0(\underline{x}_0)$ .
- 2) Considérer le tunnel dans un milieu infini (au lieu de semi-infini avec  $H$  finie), en admettant que la solution ainsi obtenue sera valable uniquement dans le voisinage de l'ouvrage.



Ouvrage profond:  $R \ll H$



$\sigma_0(\underline{x}_0)$ : contrainte au centre de la section

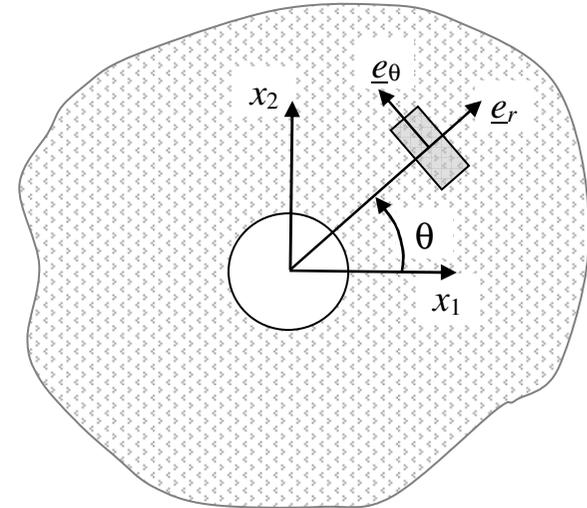
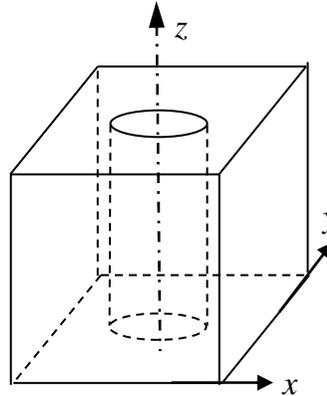


Action de creusement avec  $\sigma_0$  constant et milieu infini

# Ouvrages cylindriques dans un milieu infini

L'ouvrage, tunnel horizontal ou puit vertical, est un cylindre de section circulaire de longueur infinie dans un milieu infini.

Les champs de contraintes et de déplacements après le creusement s'expriment en coordonnées cylindriques d'axe  $z$  parallèle à l'axe de l'ouvrage.



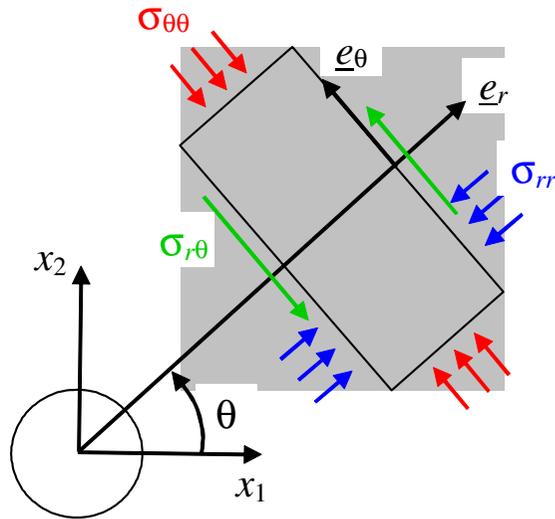
Les contraintes initiales sont exprimées plus facilement dans le repère Cartésien avec les contraintes (horizontale et verticale)  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  dans les directions  $(x_1, x_2)$ .

**Hypothèse de déformations planes:** les déplacements ne peuvent avoir lieu que dans le plan de la section ( $u_z=0$ ) et de plus, ne dépendent pas de  $z$ .

Le champ de déplacements est de la forme:

$$\underline{u}(r, \theta) = u_r(r, \theta) \underline{e}_r + u_\theta(r, \theta) \underline{e}_\theta$$

# Contraintes et déformations en coordonnées cylindriques



$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & 0 \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & 0 \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Equations d'équilibre en coordonnées cylindriques :

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) + \underline{f}^v = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + f_r = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + f_\theta = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + f_z = 0$$

Tunnels et puits :

Problème plan  $\boldsymbol{\sigma}(r, \theta)$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

# Elasticité linéaire et isotrope en coordonnées cylindriques

Relations contraintes-déformations en élasticité linéaire isotrope :

$$\sigma_{rr} = \lambda \varepsilon_{vol} + 2\mu \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \lambda \varepsilon_{vol} + 2\mu \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \sigma_{zz} = \lambda \varepsilon_{vol} + 2\mu \varepsilon_{zz}, \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu \varepsilon_{r\theta}$$

Avec: 
$$\varepsilon_{vol} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}$$

Relations inverses :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E} - \nu \frac{\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}}{E}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} - \nu \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{zz}}{E}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \nu \frac{\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}}{E}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{r\theta}$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

Déformations planes :

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})$$

# Equations du problème d'ouvrage cylindrique

Equation d'équilibre pour tunnels  
et puits (problème plan  $\sigma(r,\theta)$ )

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

Cas de **problème isotrope** : matériau et contraintes initiales isotropes  
Solution indépendante de  $\theta$  et  $\sigma_{r\theta} = 0$

L'équation d'équilibre se réduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0$$

Méthode de résolution :

Tout remplacer par le champ de déplacements :  $\sigma \leftarrow \varepsilon \leftarrow u$

( $u_r = u$ )

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad \rightarrow \quad u = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = A + \frac{B}{r^2} \end{cases}$$

$C_1, C_2, A, B$  des constantes à déterminer en fonction des conditions aux limites

# Solution du cas général (contraintes initiales anisotropes)

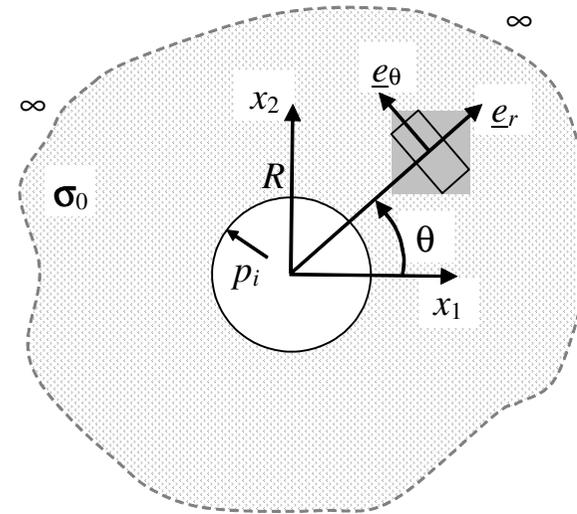
Trou circulaire de rayon  $R$  sous pression intérieure  $p_i$  dans un milieu infini à contrainte à l'infini isotrope  $\sigma_0$  :

$$\sigma_{rr}|_{r=R} = -p_i, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{rr} = \sigma_0$$

$$\sigma_{rr} = -p_i \frac{R^2}{r^2} + \sigma_0 \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = p_i \frac{R^2}{r^2} + \sigma_0 \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$u_r = \frac{\cancel{\sigma_0}}{2(\lambda + \mu)} r + \frac{(p_i + \sigma_0) R^2}{2\mu r}$$



Si on compte l'état de contrainte  $\sigma_0$  comme l'origine des déplacements, le **déplacement dû au creusement** sera :

$$u_r = \frac{(p_i + \sigma_0) R^2}{2\mu r}$$

Si  $p_i = -\sigma_0$ , pas de déplacement,  $u_r = 0$ .

Convergence du tunnel (déplacement à la paroi) :  $U = -u_r(R)$

Convergence due au creusement (déconfinement total) :

$$U = \frac{-\sigma_0 R}{2\mu}$$

# Solution de tunnel sous pression dans un milieu isotrope infini

Trou circulaire de rayon  $R$  sous pression intérieure  $p_i$  dans un milieu isotrope infini à contraintes à initiales anisotrope  $\sigma_0$  :

$$\begin{array}{l} \text{Coordonnées} \\ \text{Cartésiennes :} \end{array} \quad \sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_{rr} = \underline{e}_r \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r \\ \sigma_{\theta\theta} = \underline{e}_\theta \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_\theta \\ \sigma_{r\theta} = \underline{e}_\theta \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{e}_r \end{array}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{rr}(r, \theta, z) = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{\theta\theta} = \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta$$

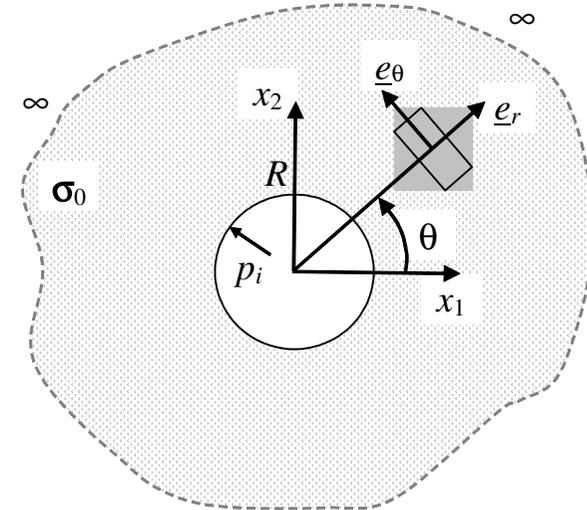
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{r\theta} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\theta$$

Paroi,  $r = R$  :

$$\underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d = -p_i \underline{n}$$

$$\underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = -p_i$$

$$\sigma_{rr} = -p_i, \quad \sigma_{r\theta} = 0$$



$$\sigma_{rr} = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left( 4 - \frac{3R^2}{r^2} \right) \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta - p_i \frac{R^2}{r^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{3(\sigma_2 - \sigma_1)}{2} \frac{R^4}{r^4} \cos 2\theta + p_i \frac{R^2}{r^2}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left[ 1 + \left( 2 - \frac{3R^2}{r^2} \right) \frac{R^2}{r^2} \right] \sin 2\theta$$

$$\sigma_{zz}(r, \theta) = \sigma_3 + 2\nu(\sigma_2 - \sigma_1) \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned} 0 = \delta \varepsilon_{zz} &\Rightarrow \delta \sigma_{zz} = \nu (\delta \sigma_{rr} + \delta \sigma_{\theta\theta}) \\ &\rightarrow \sigma_{zz} - \sigma_3 = \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} - \sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned}$$

## Solution de tunnel sous pression dans un milieu isotrope infini

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left( 4 - \frac{3R^2}{r^2} \right) \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta - p_i \frac{R^2}{r^2} \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{R^2}{r^2} + \frac{3(\sigma_2 - \sigma_1)}{2} \frac{R^4}{r^4} \cos 2\theta + p_i \frac{R^2}{r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \left[ 1 + \left( 2 - \frac{3R^2}{r^2} \right) \frac{R^2}{r^2} \right] \sin 2\theta\end{aligned}$$

**Remarque :** même si les paramètres élastiques ( $E, \nu$ ) n'apparaissent pas dans cette solution, elle n'est valable que pour le cas de l'élasticité linéaire est isotrope. Les relations de l'élasticité linéaire et isotrope ont été utilisées pour obtenir cette solution.

L'équation  $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0$  avec les conditions aux limites ci-dessus possède une infinité de solution.

**Contraintes à la paroi ( $r = R$ ):**

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -p_i \\ \sigma_{\theta\theta} &= (3\sigma_2 - \sigma_1) \cos^2 \theta + (3\sigma_1 - \sigma_2) \sin^2 \theta + p_i \\ \sigma_{r\theta} &= 0 \\ \sigma_{zz} &= \sigma_3 + 2\nu(\sigma_2 - \sigma_1) \cos 2\theta\end{aligned}$$

**Creusement** des tunnels en milieu **poroélastique** (action **instantanée**) : utiliser les paramètres d'élasticité non drainés